

## Unsicheres Wissen

### Lösung 8.1 (Wahrscheinlichkeiten)

$$P(A|A \cap B) = \frac{P(A \cap A \cap B)}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = 1$$

falls  $A \cap B \neq \emptyset$ .

### Lösung 8.2 (Wahrscheinlichkeiten)

Grundsätzlich gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

jedoch

$$0.6 \neq 0.3 + 0.5 - 0$$

Anpassung:  $P(A \cap B) = 0.2$ .

### Lösung 8.3 (Wahrscheinlichkeiten)

- $P(\text{Batterie\_voll}) = 0.3 + 0.2 = 0.5$ ,  $P(\text{folgt\_Linie}) = 0.3 + 0.05 = 0.35$
- $P(\text{Batterie\_voll} \vee \text{folgt\_Linie}) = 0.3 + 0.2 + 0.05 = 0.55$
- 

$$\begin{aligned} P(\text{folgt\_Linie} | \text{Batterie\_voll}) &= \frac{P(\text{folgt\_Linie}, \text{Batterie\_voll})}{P(\text{Batterie\_voll})} \\ &= \frac{0.3}{0.5} = 0.6 \end{aligned}$$

Die Ereignisse sind unabhängig, da beispielsweise

$$P(\text{folgt\_Linie}, \text{Batterie\_voll}) \neq P(\text{folgt\_Linie}) \cdot P(\text{Batterie\_voll})$$

Siehe dazu auch die Anmerkungen auf Seiten 202 („vereinfachte Schreibweise“) und 203 (Definition).

### Lösung 8.4 (Wahrscheinlichkeiten)

$$\begin{aligned} P(A, B | C) &= \frac{P(A, B, C)}{P(C)} \\ &= \frac{P(A | B, C) \cdot P(B, C)}{P(C)} \\ &= \frac{P(A | B, C) \cdot P(B | C) \cdot P(C)}{P(C)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P(A|B, C) \cdot P(B|C) \\
P(A|B, C) &= \frac{P(A, B, C)}{P(B, C)} \\
&= \frac{P(B|A, C) \cdot P(A|C) \cdot P(C)}{P(B|C) \cdot P(C)} \\
&= \frac{P(B|A, C) \cdot P(A|C)}{P(B|C)}
\end{aligned}$$

**Lösung 8.5 (Wahrscheinlichkeiten)**

Es gelte die bedingte Unabhängigkeit

$$P(A, B|C) = P(A|C) \cdot P(B|C).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
P(A|B, C) &= \frac{P(A, B, C)}{P(B, C)} \\
&= \frac{P(A, B|C) \cdot P(C)}{P(B|C) \cdot P(C)} \\
&= \frac{P(A|C) \cdot P(B|C) \cdot P(C)}{P(B|C) \cdot P(C)} \\
&= P(A|C)
\end{aligned}$$

**Lösung 8.6 (Wahrscheinlichkeiten)**

Benötigt wird:

$$\begin{aligned}
P(\text{rot}) &= P(\text{rot}|K_1) \cdot P(K_1) + P(\text{rot}|K_2) \cdot P(K_2) + P(\text{rot}|K_3) \cdot P(K_3) \\
&= \left( \frac{2}{11} + \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \right) \cdot \frac{1}{3} \\
&= 0.3087
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
P(K_1|\text{rot}) &= \frac{P(\text{rot}|K_1) \cdot P(K_1)}{P(\text{rot})} \\
&= \frac{\frac{2}{11} \cdot \frac{1}{3}}{0.3087} \\
&\approx 0.196
\end{aligned}$$

$$P(K_2|\text{rot}) = \dots \approx 0.480$$

$$P(K_3|\text{rot}) = \dots \approx 0.324$$

**Lösung 8.7 (Wahrscheinlichkeiten)**

a) Nach Seite 206 gilt:

$$\begin{aligned}
P(C \Rightarrow D) &= P(\neg C \vee D) \\
&= P(\neg C) + P(D|C) \cdot P(C)
\end{aligned}$$

b) Gleichheit von  $P(C \Rightarrow D)$  und  $P(D|C)$  liegt vor bei  $P(C) = 1$  oder  $P(C \Rightarrow D) = 1$ .

c) Als einzige Werte seien  $P(C)$  und  $P(C \Rightarrow D)$  bekannt. Wegen a) gilt

$$P(D|C) = \frac{P(C \Rightarrow D) - P(\neg C)}{P(C)}$$

und damit

$$\begin{aligned} P(D) &= P(C \wedge D) + P(\neg C \wedge D) \\ &= P(D|C) \cdot P(C) + P(D|\neg C) \cdot P(\neg C) \\ &= P(C \Rightarrow D) - P(\neg C) + P(D|\neg C) \cdot P(\neg C) \end{aligned}$$

Über  $P(D|\neg C)$  ist nur bekannt, dass der Wert zwischen 0 und 1 liegt. Bei  $P(D|\neg C) = 0$  gilt

$$\begin{aligned} P(D) &= P(C \Rightarrow D) - P(\neg C) \\ &= P(C \Rightarrow D) - 1 + P(C) \end{aligned}$$

Bei  $P(D|\neg C) = 1$  gilt

$$\begin{aligned} P(D) &= P(C \Rightarrow D) - P(\neg C) + P(\neg C) \\ &= P(C \Rightarrow D) \end{aligned}$$

Damit lassen sich bei bekannten Werten für  $P(C)$  und  $P(C \Rightarrow D)$  nur Grenzen für den Wert von  $P(D)$  bestimmen.

### Lösung 8.8 (Sicherheitsfaktoren)

$CF(a|E) = 1$ : Da  $a$  damit definitiv gültig ist, wirkt sich die Regel zu 100% aus und es gilt  $CF(h|E) = CF(h|a)$ .

$CF(a|E) = -1$ : Da  $a$  damit definitiv ungültig ist, findet die Expertenregel mit Wichtung  $CF(h|a)$  (also für den „positiven“ Fall) keine Anwendung. Falls aber eine andere Regel mit Wichtung  $CF(h|\neg a)$  existiert, wird diese angewendet und es folgt  $CF(h|E) = CF(h|\neg a)$ .

$CF(a|E) = 0$  signalisiert absolute „Unwissenheit“ bez. der Gültigkeit der Prämisse. Die berechnete Unwissenheit  $CF(h|E) = 0$  bez. der Gültigkeit der Hypothese ist daher sinnvoll.

### Lösung 8.9 (Sicherheitsfaktoren)

$CF(h E_1)$	$CF(h E_2)$	$CF(h E_1, E_2)$
0.5	0.6	0.8
-0.5	-0.6	-0.8
0.8	-0.4	4/6
1	-0.4	1
0	0.8	0.8
0	0	0
1	-1	undefined

Zwei Wichtigen mit gleichem Vorzeichen verstärken sich leicht, da die „Richtung“ identisch ist (Fälle 1 und 2). Unterschiedliche Vorzeichen wirken im Sinne eines

zu suchenden „Kompromisses“ entgegengesetzt. Der Wert 1 signalisiert definitive Gültigkeit, er setzt sich damit gegen jeden anderen Wert (Ausnahme -1) durch. Der Wert 0 (z.B. „keine Ahnung“) hat im Rahmen der Kombination keinen Einfluss. Die Werte 1 und -1 charakterisieren einen Konflikt bzw. einen absoluten Widerspruch.

**Lösung 8.10 (Sicherheitsfaktoren)**

- a)  $CF(h1) = 0.6$ ,  
 $CF(h2) = (0.4 - 0.5)/(1 - \min(0.4, 0.5)) = -1/6$ ,  
 $CF(h1 \wedge h2) = \min(0.6, -1/6) = -1/6$ ,  
 $CF(h1 \vee h2) = \max(0.6, -1/6) = 0.6$
- b) Und-Oder-Kombinationsgraph analog zu Abb. 8.3.
- c) Die Informationsquellen bzw. Evidenzen zur Bewertung der Prämissen der Regeln seien mit  $E, F$  und  $G$  bezeichnet. Es wird berechnet:  
 $CF(S_4|E) = 0.4$ ,  $CF(H^1|E) = 0.4$ ,  $CF(H^2|F) = 0.3$ ,  $CF(H^3|G) = 0$ ,  
 $CF(H^{1,2}|E, F) = 0.58$ ,  $CF(H|E, F, G) = 0.58$

**Lösung 8.11 (Sicherheitsfaktoren)**

- Sei  $x \geq 0$ . Dann gilt:  $\oplus(x, 0) = x + 0 - x \cdot 0 = x$   
 Sei  $x < 0$ . Dann gilt:  $\oplus(x, 0) = (x + 0)/(1 - \min(|x|, 0)) = x$   
 Damit gilt für jeden Sicherheitsfaktor  $x$  die Wirkungslosigkeit einer „leeren“ Information:  $\oplus(x, 0) = x$

- Seien  $x, y \geq 0$ . Dann gilt:

$$\oplus(x, y) = x + y - x \cdot y = y + x - y \cdot x = \oplus(y, x)$$

$\oplus$  ist daher für  $x, y \geq 0$  kommutativ. Der Beweis der anderen Fälle erfolgt analog.

- Seien  $x, y, z \geq 0$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \oplus(x, \oplus(y, z)) &= x + (y + z - yz) - x \cdot (y + z - yz) \\ &= x + y + z - yz - xy - xz + xyz \\ &= (x + y - xy) + z - (x + y - xy) \cdot z \\ &= \oplus(\oplus(x, y), z) \end{aligned}$$

- Für positive Sicherheitsfaktoren  $x$  und  $y$  und den negativen Sicherheitsfaktor  $z$  erfolgt der Beweis der Kommutativität analog.

**Lösung 8.12 (Studenten, aus (Heinsohn & Socher 07))**

Ist ein Student qualifiziert ( $A = a$ ), so bekommt er im allgemeinen eine gute Diplomnote ( $B = b$ ). Absolventen mit guten Noten werden in dem untersuchten Unternehmen in nahezu jedem Fall eingestellt ( $C = c$ ).

Die folgenden Wahrscheinlichkeiten sind bekannt:  $P(a) = 0.4$ ,  $P(b|a) = 0.8$ ,  $P(b|\neg a) = 0.5$ ,  $P(c|b) = 0.9$ ,  $P(c|\neg b) = 0.2$ . Wir erhalten daraus die Matrizen  $M(B|A)$  und  $M(C|B)$ , die lokal in den Knoten  $B$  und  $C$  gespeichert werden:

$P(B A)$	$a$	$\neg a$	$P(C B)$	$b$	$\neg b$
$b$	0.8	0.5	$c$	0.9	0.2
$\neg b$	0.2	0.5	$\neg c$	0.1	0.8

Die Initialisierungsphase berechnet zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bewerber eingestellt wird. Zu Beginn der Initialisierungsphase befindet sich der Knoten  $A$  im Zustand  $\pi(A) = [0.4, 0.6]^\top$ ,  $\lambda(A) = [1, 1]$ . Man berechnet  $Bel(A) = \gamma \cdot \lambda(A) \times \pi(A)^\top = [0.4, 0.6]$  mit  $\times$  als komponentenweiser Multiplikation. Die  $\pi$ - und  $\lambda$ -Vektoren der übrigen Knoten sind alle gleich  $[1, 1]$ .

Im ersten Schritt wird  $B$  von  $A$  informiert. Dies geschieht durch Versenden des Vektors  $\pi_{A \rightarrow B} = \pi(A)$ . Knoten  $B$  empfängt die Nachricht von  $A$  und aktualisiert seinen  $\pi$ -Vektor:

$$\pi(B) = M_{B|A} \cdot \pi_{A \rightarrow B} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.62 \\ 0.38 \end{bmatrix}$$

Dies führt zur Berechnung von  $Bel(B) = [0.62, 0.38]$ .

Knoten  $B$  informiert sein Kind  $C$  durch das Versenden von  $\pi_{B \rightarrow C} = \pi(B)$ . Knoten  $C$  verwendet diese Information wie zuvor der Knoten  $B$  zur Aktualisierung:  $\pi(C) = M_{C|B} \cdot \pi_{B \rightarrow C} = [0.634, 0.366]^\top$ . Damit ist  $Bel(C) = [0.634, 0.366]$ . Die Firma stellt also einen Studenten mit einer Wahrscheinlichkeit von 63.4% ein.

Es wird nun beobachtet, dass die Firma einen Bewerber nicht eingestellt hat. Es soll herausgefunden werden, was dies in Bezug auf die Qualifikation dieses Studenten zu bedeuten hat: Die Beobachtung verändert den  $\lambda$ -Vektor  $\lambda(C) = [0, 1]$  und damit auch den Belief-Wert in Knoten  $C$ :

$$Bel(C) = \gamma \cdot \lambda(C) \times \pi(C)^\top = \gamma \cdot [0, 1] \times [0.634, 0.366] = [0, 1]$$

Diese Veränderung führt zu einer Nachricht an Vater  $B$ :

$$\lambda_{C \rightarrow B} = \lambda(C) \cdot M_{C|B} = [0, 1] \cdot \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} = [0.1, 0.8]$$

In Knoten  $B$  wird auf Basis des vorhandenen  $\pi$ -Vektors und des neuen  $\lambda$ -Vektors  $\lambda(B) = \lambda_{C \rightarrow B}$  der Belief-Vektor  $Bel(B)$  neu berechnet:  $Bel(B) = \gamma \cdot \lambda(B) \times \pi(B)^\top = [0.1694, 0.8306]$ .

Auf analoge Weise berechnet man für den Vaterknoten  $A$  mit  $\lambda(A) = \lambda_{B \rightarrow A}$  und  $\pi(A)$  den Belief-Wert  $Bel(A) = [0.2623, 0.7377]$ . Der von der Firma abgewiesene Student ist offensichtlich nur unterdurchschnittlich qualifiziert.

### Lösung 8.13 (Bayessche Netze, aus Lösungsbuch zu (Nilsson 98))

$$P(A|D) = P(A, D)/P(D)$$

$$\begin{aligned} P(A, D) &= P(D|B, C)P(B|A)P(C|A)P(A) \\ &\quad + P(D|B, \neg C)P(B|A)P(\neg C|A)P(A) \\ &\quad + P(D|\neg B, C)P(\neg B|A)P(C|A)P(A) \\ &\quad + P(D|\neg B, \neg C)P(\neg B|A)P(\neg C|A)P(A) \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|B, C)P(B|A)P(C|A)P(A) \\ &\quad + P(D|B, \neg C)P(B|A)P(\neg C|A)P(A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +P(D|\neg B, C)P(\neg B|A)P(C|A)P(A) \\
& +P(D|\neg B, \neg C)P(\neg B|A)P(\neg C|A)P(A) \\
& +P(D|B, C)P(B|\neg A)P(C|\neg A)P(\neg A) \\
& +P(D|B, \neg C)P(B|\neg A)P(\neg C|\neg A)P(\neg A) \\
& +P(D|\neg B, C)P(\neg B|\neg A)P(C|\neg A)P(\neg A) \\
& +P(D|\neg B, \neg C)P(\neg B|\neg A)P(\neg C|\neg A)P(\neg A) \\
& = 3/4
\end{aligned}$$

Damit erhält man  $P(A|D) = 2/3$ .

**Lösung 8.14 (Dempster-Shafer)**

a) Große Unwissenheit beim Mediziner vor der ersten Untersuchung des Patienten. Mit jedem Untersuchungsergebnis Zunahme des Wissens und damit Verkleinerung der Intervalle.

b),c)

A	$m'(A)$	$bel(A)$	$pl(A)$
$\emptyset$	0	0	0
{1}	0.5	0.5	0.5
{2}	0	0	0.25
{3}	0.25	0.25	0.5
{1, 2}	0	0.5	0.75
{1, 3}	0	0.75	1
{2, 3}	0.25	0.5	0.5
{1, 2, 3}	0	1	1

d) Das Intervall für „ $F_2$  oder  $F_3$ “ ist  $[0.5, 0.5]$  und damit eine präzise Wahrscheinlichkeit. Die Sensoren a und b (mit Gesamtgewicht 0.5) halten eine dieser beiden Farben für sicher. Aber auch nur diese beiden Sensoren, also nicht der Sensor c, halten eine dieser beiden Farben für möglich. Damit fallen die Intervallgrenzen aufeinander.

e) Jeder Sensor nennt maximal eine Farbe.

**Lösung 8.15 (Dempster-Shafer)**

a)  $m_2(\{2, 3\}) = 1, 0$  sonst

b)  $K = 0.5$  gem. Formel (8.44)

c) Mit  $m = m_1 \oplus m_2$  ergibt sich  $m(\{3\}) = 0.5, m(\{2, 3\}) = 0.5, 0$  sonst. Damit ist die Farbmenge  $\{2, 3\}$  sicher, da die neue Sensorquelle alles andere ausschließt. Mit dem Intervall  $[0.5, 1]$  ist die Farbe  $F_3$  in Bezug auf beide Intervallgrenzen deutlich wahrscheinlicher geworden.

d) siehe Seite 249.

**Lösung 8.16 (Dempster-Shafer)**

Man erhält wieder  $m_1$ , da  $m_2$  eine „leere“ Informationsquelle repräsentiert. Die Kombination mit leerer Information ergibt (sinnvollerweise) wieder die ursprüngliche Quelle.

**Lösung 8.17 (Dempster-Shafer)**

Der Beweis kann dem Originalbuch von Shafer [Shafer 76] auf den Seiten 48/49 entnommen werden. Benötigt wird dazu eine Hilfsaussage, auf deren Beweis an dieser Stelle verzichtet werden soll. Es gilt:

$$\sum_{C:B \subseteq C \subseteq A} (-1)^{|C|} = \begin{cases} (-1)^{|A|} & \text{falls } A = B, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Unter Verwendung dieser Gleichheit wird wie folgt bewiesen:

$$\begin{aligned} \sum_{B:B \subseteq A} (-1)^{|A \cap \bar{B}|} bel(B) &= (-1)^{|A|} \sum_{B:B \subseteq A} (-1)^{|B|} bel(B) \\ &= (-1)^{|A|} \sum_{B:B \subseteq A} (-1)^{|B|} \sum_{C:C \subseteq B} m(C) \\ &= (-1)^{|A|} \sum_{C:C \subseteq A} m(C) \sum_{B:C \subseteq B \subseteq A} (-1)^{|B|} \\ &= (-1)^{|A|} m(A) (-1)^{|A|} \\ &= m(A) \end{aligned}$$

**Lösung 8.18 (Dempster-Shafer)**

Der Beweis kann dem Originalbuch von Shafer [Shafer 76] auf den Seiten 71/72 entnommen werden. Gegeben sei die Basiswahrscheinlichkeit  $m_2(B) = 1$ , 0 sonst, die das „Lernen“ von  $B$  darstellt, sowie eine weitere Basiswahrscheinlichkeit  $m_1$ . Die Kombinationsregel (8.45) nimmt dann die folgende Form an:

$$\begin{aligned} m(A) &= \frac{\sum_{A_i:A_i \cap B=A} m_1(A_i)}{1 - \sum_{A_i:A_i \cap B=\emptyset} m_1(A_i)} \\ &= \frac{\sum_{C:B \cap C=A} m_1(C)}{1 - bel_1(\bar{B})} \\ bel_B(A) &= \sum_{D:D \subseteq A} m(D) \\ &= \frac{\sum_{D:D \subseteq A} \sum_{C:B \cap C=D} m_1(C)}{1 - bel_1(\bar{B})} \\ &= \frac{\sum_{C:B \cap C \subseteq A} m_1(C)}{1 - bel_1(\bar{B})} \\ &= \frac{\sum_{C:C \subseteq A \cup \bar{B}, C \not\subseteq B} m_1(C)}{1 - bel_1(\bar{B})} \\ &= \frac{bel_1(A \cup \bar{B}) - bel_1(\bar{B})}{1 - bel_1(\bar{B})} \end{aligned}$$

Für Fragen und Hinweise kontaktieren Sie mich unter  
heinsohn@fh-brandenburg.de.